

文章编号: 1000-7598-(2013) 07-2091-08

基于 MATLAB 的边坡稳定性 极限上限分析程序开发

唐高朋¹, 赵炼恒¹, 李 亮¹, 高连生¹, 谭悍华²

(1. 中南大学 土木工程学院, 长沙 410075; 2. 贵州省交通规划勘察设计研究院股份有限公司, 贵阳 550001)

摘 要: 基于系统能耗最小原理的极限分析上限定理, 利用 MATLAB 强大的数据处理功能, 对边坡稳定系数 N_{cr} 采用序列二次规划法 (SQP) 进行优化计算, 并与枚举法相结合, 从而解决 SQP 算法求解优化解容易陷入局部最优解的问题。同时开发了一款简单实用的边坡稳定性分析软件, 实现了计算结果与临界滑裂破坏面图形的可视化输出。与经典算例对比分析, 计算结果具有较好的一致性, 表明了程序的可靠性。分析了内摩擦角 φ 、边坡倾斜角 α 、 β 3 个参数对边坡稳定系数 N_{cr} 的影响。计算结果表明: 边坡稳定性系数 N_{cr} 对 φ 、 β 较为敏感, 而对 α 的敏感次之。其次, 当 φ 、 β 比较接近或在小范围内波动时, 对稳定性系数 N_{cr} 的影响特别敏感; 当 φ 、 β 值较小时, 滑动面通过坡趾下方, 而当 β 值比较大时, 滑动面通过坡趾。

关 键 词: 边坡稳定性; 极限分析上限法; 稳定系数; MATLAB; 程序设计

中图分类号: TU 457

文献标识码: A

Program development for slope stability using MATLAB software and upper bound limit analysis

TANG Gao-peng¹, ZHAO Lian-heng¹, LI Liang¹, GAO Lian-sheng¹, TAN Han-hua²

(1. School of Civil Engineering, Central South University, Changsha 410075, China;

2. Guizhou Communications Planning and Projecting Design Academy, Guiyang 550001, China)

Abstract: Based on the upper bound limit analysis, the functional program about the slope stability problem was developed by MATLAB. The stability factor (N_{cr}) and graph of critical slip surface can be visually shown in the program window. The solutions of stability factor (N_{cr}) were obtained through the calculation results of nonlinear and sequential quadratic programs (SQP), combined with the method of exhaustion to avoid sticking at the local optimization. The results demonstrated the effectiveness of the program. The influence on the stability of slope was evaluated by analyzing the factors in terms of the internal frictional angle φ , slope angles α and β . The calculation results show that the stability factor (N_{cr}) is more sensitive to the frictional angles φ and β than α . In addition, if the frictional angles φ and β are close to each other and the values of φ and β fluctuate in the narrow range, the slope stability is sensitive to the stability factor (N_{cr}). In other words, when the low values of φ and β are inputted in the program, the slip surface would cross below the slope toe, while the slip surface would intersect at the slope toe for the case of steep slope.

Key words: slope stability analysis; upper bound limit analysis; stability factor; MATLAB; program design

1 引 言

边坡稳定性分析一直是土木工程中研究的热点。边坡稳定性分析方法通常有 3 种: 极限分析法、极限平衡法和有限元法。极限平衡法由于条块划分及其间作用力的随意性, 且未能考虑到土体的

应力-应变关系, 在理论上有一定的局限性^[1-4]; 有限元法存在岩土参数与材料本构模型选取的不确定性^[1, 5], 故尚未得到广泛的认可, 更多用于已有方法的对比验证; 极限分析法 (能量法) 由于其明确的物理意义和严格的解答范围, 经前人的实践^[1-4, 6-15]发现此方法得到的解比较可靠。

收稿日期: 2012-07-19

基金项目: 国家自然科学基金项目 (No. 51078359, No. 51208522); 中国博士后科学基金资助项目 (No. 20110491269, No. 2012T50708); 贵州省交通运输厅科技项目 (No. 2012122033); 湖南省科学技术厅科技计划项目 (No. 2012SK3231)。

第一作者简介: 唐高朋, 男, 1989 年生, 硕士研究生, 主要从事道路与铁道工程、边坡稳定性极限分析方面的研究工作。

通讯作者: 赵炼恒, 男, 1980 年生, 在站博士后, 讲师, 硕士生导师, 主要从事道路与铁道工程、岩土极限分析理论与应用方面的教学与科研工作。

E-mail: zlh8076@163.com

目前,岩土工程设计计算过程中边坡稳定性分析软件多采用极限平衡法,也有不少的软件采用的比较前沿的有限元法。但基于极限分析的边坡稳定性分析软件,还比较少见,陈祖煜等^[10]在这方面做了较深入的研究。本文以简单破坏模式下的二级土质边坡为研究对象,结合前人研究成果^[1-4, 6-8, 11],在以极限分析为基础的边坡稳定性分析程序的实现及可视化方面进行了一些初期的尝试,并对计算结果进行了相关的探讨,以期给研究人员提供一些有益的参考。

2 边坡破坏机制与稳定性分析

2.1 极限分析上限法理论与假设

极限分析上限法,又称极限分析能量法^[1],是基于虚功原理推导的,根据内部能耗与外力做功相等的原理得到目标函数,通过最小能耗原理获得机动容许塑性变形流动发生后,极限荷载的最小值。虚功率方程如下:

$$\int_A T_i u_i dA + \int_V F_i u_i dv \geq \int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* dv + \int_L c_i v_i dL \quad (1)$$

此处,是沿物体的整个面积 A 或者体积 V 以及滑裂线 L 进行积分。

式中: σ_{ij}^* 为由 ε_{ij}^* 按塑性变形法则求出的应力; T_i 、 F_i 分别为物体上面力和体力; v_i 为速度间断线两侧切向速度变化量; u_i 和 ε_{ij}^* 分别为速度场中的速度与应变; c 为土的黏聚力。

极限分析上限法用于土体时应满足以下的假定条件: ①土体为理想塑性材料,破坏时服从线性 M-C 破坏准则; ②土体的屈服方程在应力空间是外凸的; ③土体服从相关联流动法则。

2.2 边坡稳定性上限分析模型建立

2.2.1 破坏模式

根据已有研究成果^[1-4],采用与实际情况更加贴近的对数螺旋面临界破坏机制建立破坏模型,对数螺旋面方程为

$$r(\theta) = r_0 \exp[(\theta - \theta_0) \tan \varphi] \quad (2)$$

式中: θ 、 θ_0 均为描述螺旋线破坏机制的角度参数; r 为 θ 按定义的极径; r_0 为 $\theta = \theta_0$ 的极径; φ 为土体内摩擦角。

如图 1 所示,刚体块 $A-B-C'-C-A$ 绕旋转中心 O 作刚体旋转,以对数螺旋面 BC' 分界,其下的土体保持静止。 BC' 为一不计厚度的薄层,可理解为速度间断面。因此,假想机构可以由变量 θ_h 、 θ_0 、 β' 确定。

由几何关系可知, H/r_0 和 L/r_0 比值可以用角度 θ_h 和 θ_0 以及 β' 表示:

$$\frac{H}{r_0} = \{ \sin(\theta_h + \alpha) \exp[(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] - \sin(\theta_0 + \alpha) \} \cdot \frac{\sin \beta'}{\sin(\beta' - \alpha)} \quad (3)$$

$$\frac{L}{r_0} = \frac{\sin(\theta_h - \theta_0)}{\sin(\theta_h + \alpha)} - \frac{\sin(\theta_h + \beta')}{\sin(\theta_h + \alpha) \sin(\beta' - \alpha)} \cdot \{ \sin(\theta_h + \alpha) \exp[(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] - \sin(\theta_0 + \alpha) \} \quad (4)$$

式中: H 为坡高 (m); β 为土坡倾斜角 ($^\circ$)。

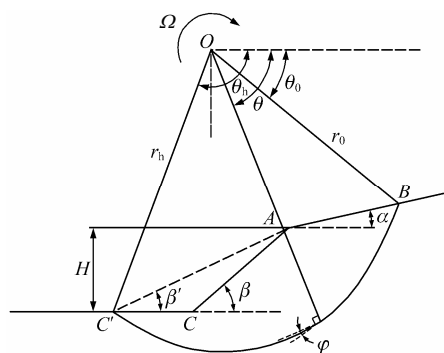


图 1 对数螺旋面旋转破坏机制

Fig.1 Rotational failure mechanism of logarithm helicoid

2.2.2 能耗计算

仅考虑土体的自重,根据极限上限法建立能耗平衡方程,能耗计算包括两个方面:重力对刚体做的功和滑动面内部能耗散。

(1) 重力做功

先求出 $OBC'O$ 、 $OABO$ 、 $OAC'O$ 、 $ACC'A$ 区土体自重多做的功为 W_1 、 W_2 、 W_3 、 W_4 ,于是重力对刚体块 $A-B-C'-C-A$ 做的功为

$$W_{ABC'CA} = W_1 - W_2 - W_3 - W_4 = \gamma r_0^3 \Omega (f_1 - f_2 - f_3 - f_4) \quad (5)$$

函数 $f_1 \sim f_4$ 为与 θ_h 、 θ_0 、 α 、 β 、 β' 、 φ 相关的函数,具体表达式如下:

$$f_1 = \frac{1}{3(1 + 9 \tan^2 \varphi)} \{ (3 \tan \varphi \cos \theta_h + \sin \theta_h) \cdot \exp[3(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi - (3 \tan \varphi \cos \theta_0 + \sin \theta_0)] \} \quad (6)$$

$$f_2 = \frac{1}{6} \frac{L}{r_0} \left(2 \cos \theta_0 - \frac{L}{r_0} \cos \alpha \right) \sin(\theta_0 + \alpha) \quad (7)$$

$$f_3 = \frac{1}{6} \exp[(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] \cdot \left[\sin(\theta_h - \theta_0) - \frac{L}{r_0} \sin(\theta_h + \alpha) \right] \cdot \left\{ \cos \theta_0 - \frac{L}{r_0} \cos \alpha + \cos \theta_h \exp[(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] \right\} \quad (8)$$

$$f_4 = \left(\frac{H}{r_0} \right)^2 \frac{\sin(\beta - \beta')}{2 \sin \beta \sin \beta'} \cdot \left[\cos \theta_0 - \frac{L}{r_0} \cos \alpha - \frac{1}{3} \frac{H}{r_0} (\cot \beta + \cot \beta') \right] \quad (9)$$

(2) 滑动面内能耗散

内部能耗发生在速度间 BC' 断面上, 沿该假定滑动面的能量耗损微分, 可以由该面的微分面积 $rd\theta/\cos\varphi$ 与黏聚力 c 以及与间断面的切向间断速度 $v\cos\varphi$ 的连乘计算, 见图 1。沿整个滑动面积分可得内部耗能:

$$\int_{\theta_0}^{\theta_h} cv \cos \varphi \frac{rd\theta}{\cos \varphi} = \frac{cr_0^2 \Omega}{2 \tan \varphi} \exp[2(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi - 1] \quad (10)$$

2.2.3 稳定性分析

根据能耗上限法计算公式, 使外荷载所做的功率等于内能耗散率, 可求得边坡的临界高度 H_{cr} 为

$$H_{cr} = \frac{c}{\gamma} f(\theta_h, \theta_0, \beta') \quad (11)$$

其中,

$$f(\theta_h, \theta_0, \beta') = \sin \beta' \{ \exp[2(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] - 1 \} \cdot \{ \sin(\theta_h + \alpha) \exp[(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] - \sin(\theta_0 + \alpha) \} / 2 \sin(\beta' - \alpha) \tan \varphi (f_1 - f_2 - f_3 - f_4) \quad (12)$$

式中: γ 为岩土的重度; 函数 $f_1 \sim f_4$ 为与 θ_h 、 θ_0 、 α 、 β 、 β' 、 φ 相关的函数。

记 $N_{cr} = \min f(\theta_h, \theta_0, \beta')$, 无量纲数 N_{cr} 定义为边坡稳定系数, 稳定系数越大, 则边坡越稳定。

因此, 当满足条件 ($\beta \leq \beta'$)

$$\left. \begin{aligned} \partial f / \partial \theta_h &= 0 \\ \partial f / \partial \theta_0 &= 0 \\ \partial f / \partial \beta' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

时, 函数 $f(\theta_h, \theta_0, \beta')$ 有极小值, 也就是最小值, 进而得到边坡稳定系数 N_{cr} 的一个上限解答。

2.3 模型的程序实现与改进

将求 N_{cr} 最小值问题, 转化为约束非线性最优

化问题, 引入 MATLAB 中求解单目标多变量非线性约束函数 $fmincon$ 函数^[16], 其数学模型如下:

$$\begin{aligned} \min_{x \in R^n} f(x) \\ \text{st. } \begin{cases} Ax \leq B \\ A_{eq} X = B_{eq} \\ l \leq X \leq u \\ ceq_i(x) = 0 \\ c_i(x) \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

在程序应用中, 一般设定 x 为列向量, 则其中 A 为一矩阵, 行数等于关于 x 的线性不等式方程(组)约束的个数, 列数为 x 的个数; B 为一列向量, 维数等于线性约束个数。 A_{eq} 和 B_{eq} 分别是 x 线性等式方程(组)的矩阵和列向量。 l 和 u 分别为 x 的下限和上限, 均为列向量。 ceq_i 和 c_i 分别为定义关于 x 的非线性等式方程(组)和不等式方程(组)两个变量。

其中稳定系数 N_{cr} 被看作目标函数, 寻求土坡稳定系数的数学规划表达式如下:

$$\min N_{cr} = f(\theta_h, \theta_0, \beta') \quad (15)$$

$$\text{st. } \begin{cases} \theta_0 < \theta_h < \pi \\ 0 < \theta_0 < \pi/2 \\ 0 < \beta < \beta' \end{cases} \quad (16)$$

式中: θ_0 和 θ_h 分别为基准线 OB 和 OC' 的倾角; β' 为线段 AC' 与水平面的夹角。

3 程序的开发与简介

以程序的易用性为出发点, 为保证软件具有较高的可维护性及可扩展性, 采用面向对象编程技巧, 通过 MATLAB 自带的可视化界面编辑器实现了参数的可视化输入, 计算结果与图像的可视化输出, 可给工程应用提供极大的便利。同时采用的是模块化的设计, 为以后的扩展、程序新功能模块的添加如锚杆、抗滑桩等提供了技术支持。

3.1 程序的设计流程

首先选择变量变化模型, 确定主要的设计参数与约束条件, 系统会对输入参数进行合理化判断(若满足则进行下一步, 反之则提示输入正确的数值), 读入数据后系统自动运行程序, 系统对所得的初步结果做合理性判断(若满足则输出到界面, 反之则继续搜寻到满意的值), 最后通过界面的按键来实现数据的处理, 边坡图形在界面上的绘制程序设计的流程图如图 2 所示。

3.2 程序的组成

本程序由前处理部分、核心计算部分、后处理部分 3 个模块构成 (如图 3 所示)。

前处理部分是用于控制参数的输入, 数据的采集可以直接通过键盘输入; 核心计算部分用于计算主 (子) 程序得到所需的计算结果, 这些程序可以自行编制也可以调 MATLAB 中自带的函数; 后处理部分就是将计算结果以可视化的形式显示出来, 并可实现对优化后的数据的保存以及 MATLAB 自带的界面绘图功能进行了界面显示, 并提供了生产与 AUTOCAD 的图形文件接口, 进一步方便了用户对图形的修改与编辑。

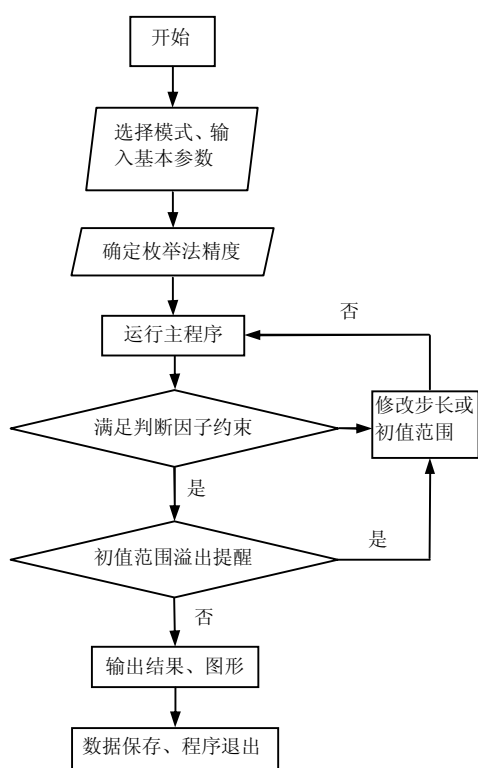


图 2 程序流程图

Fig.2 Program flow char

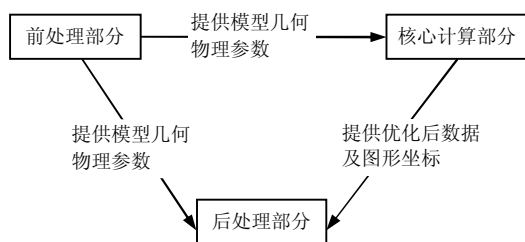


图 3 各部分关系简图

Fig.3 Relationship among each part

3.3 程序功能简介

本程序界面主要有两个部分组成, 引导界面和

主界面。引导界面也就是欢迎界面; 主界面是指用户可在上面进行各种操作的界面。

进入系统出现如图 4 所示。



图 4 程序引导界面

Fig.4 Program guide interface

点击图 4 中的稳定系数 N_{cr} 求解与分析按钮, 进入稳定性系数分析的主界面。用户可以根据 MATLAB 输入习惯输入矩阵、标量、向量。如, 输入下斜坡坡角 β 从 $30^\circ \sim 90^\circ$ 变化, 步长为 10° , 用户可以逐个直接输入到编辑框中, 也可以写成如下形式: $30:10:90$ 输入到编辑框中。点击单选按钮运行程序可得对应状态下优化结果。图形可视化窗口可实现图形的输出以及数据的显示, 通过对应按钮可实现这些图形与数据的简单处理。

以下结合案例来具体说明, 上斜坡坡角 α 为 $0^\circ \sim 5^\circ$ 变化, 下斜坡坡角 β 为 $30^\circ \sim 90^\circ$ 变化, 土体的内摩擦角为 20° , 黏聚力 c 为 20 kPa, 土体的重度 γ 为 20 kN/m^3 。选定变参数的模式 (φ 值一定, α 与 β 变化), 将以上参数输入到主界面的编辑框中, 运行程序可得如下优化后的图形与结果。

主界面主要实现了以下功能, 结合图 5 进行说明:

图框 1 实现了参变量模式的选择、参数的键盘输入与修改、计算图形的保存、程序主要命令的执行。选中多元参数之间影响栏中的单选按钮, 以实现对应趋势图形的输出, 单击图形汇总单选按钮, 汇总出个优化后变参量的趋势图, 便于各计算结果的对比与分析, 得到界面如图 6 所示。

图框 2 实现了对应模式下已知参变量变化时优化后目标参数的变化趋势图在主界面的直观显示。

图框 3 实现了对获得的优化结果进行内点插值, 获得稳定系数三维插值图; 可通过步长的修改

栏, 来实现插值精度的修改; 此外还可以从外部导入已有数据进行插值计算获得所需结果。

图框 4 实现了对应模式和参数下临界破坏边坡的二维图形的显示; 其中边框图参数保存按钮来保存临时绘制此边坡图形所需的各控制点导入 EXCEL 文件中, 通过接口导入到 CAD 中直接绘出, 方便图形的修改。数据保存按钮用于实现对计算结果及时保存。

图框 5 最优解输出栏可以直观地看到不同的 α 与 β 对应的稳定系数 N_{cr} 和确定边坡破坏面的参数 θ_h 、 θ_0 及 β' , 对应的临界高度也可以直接点击主

界面上的临界高度输出按钮, 所得结果如图 7 所示。

此外, 可以通过工具栏中的箭头按钮来调整图片和图例框, 使之达到理想的效果, 通过控制板中功能实现修改后图形的输出。

3.4 程序的优化

总结开发边坡稳定性分析过程中的一些体会发现, Fmincon 函数存在如下缺陷: ①Fmincon 为单目标的非线性优化函数, 无法批量处理多个边坡稳定性分析问题; ②采用的优化算法使得结果对初值的依赖性较强, 目标函数是多峰值的函数时, 往往得不到全局最优解, 容易陷入局部最优解。

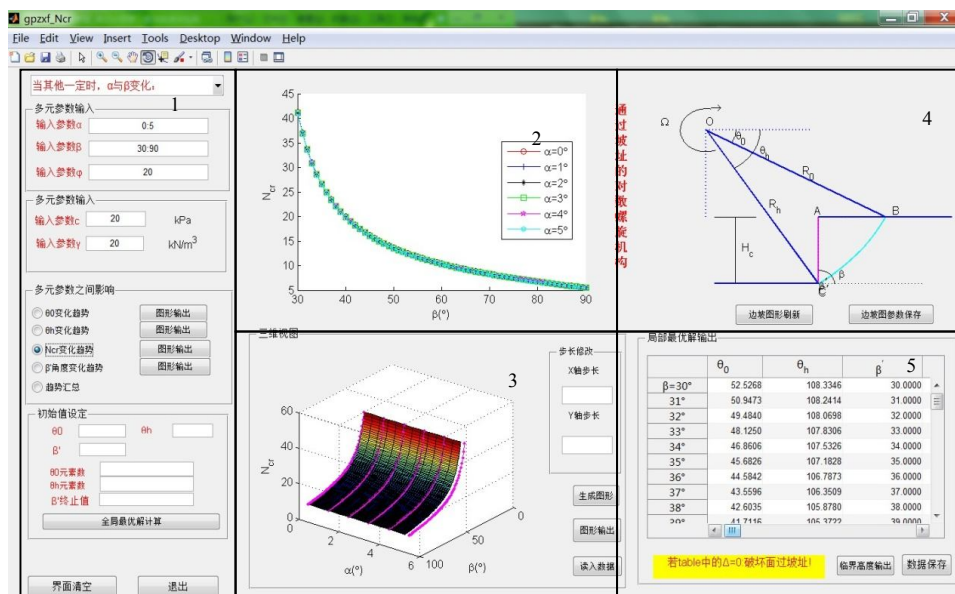


图 5 可视化主界面
Fig.5 Visual main interface

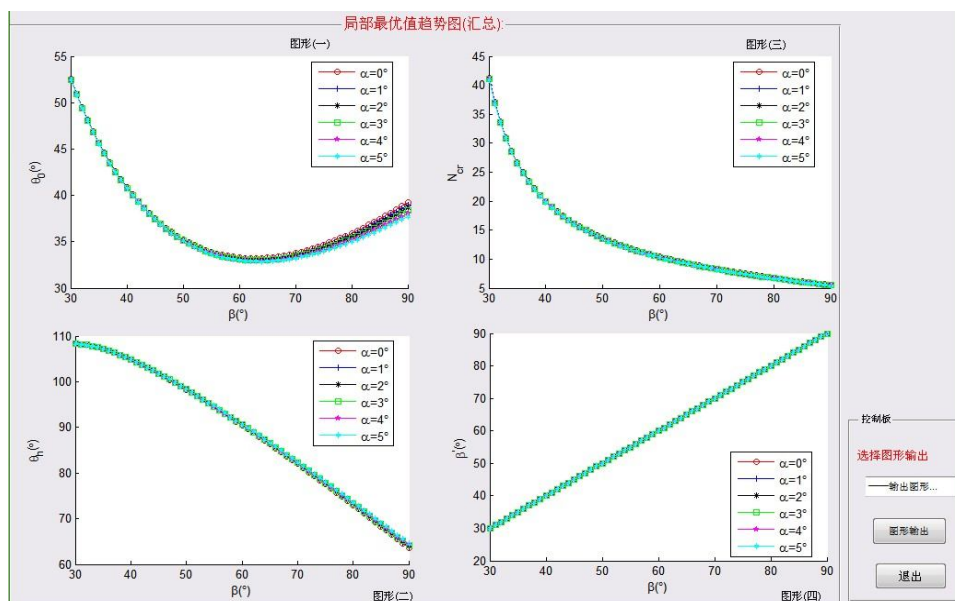


图 6 趋势图汇总界面
Fig.6 Trends aggregated interface

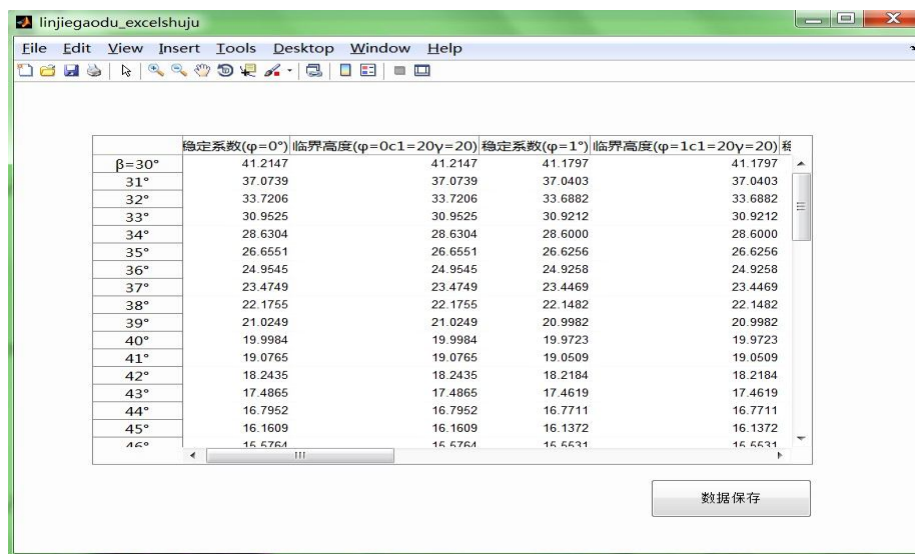


图7 稳定系数、临界高度输出界面

Fig.7 Output interface of stability factor and critical height

针对以上两种局限,程序中给出了改进的方法:

①在程序中可添加循环语句来达到批量求解和分析边坡稳定性的效果;②优化法与穷举法结合,由于其对初值的依赖性比较强,而采用穷举法(枚举法),即一些充满参数设计空间的试验设计方法(space filling design),比如均匀设计、拉丁超立方采样等,在初值参数空间内均匀地找一些初值,然后对每个初值分别进行优化,最后找一个最优的(最小的)作为全局最优解。并结合循环语句,通过选取适当的判断因子来判别对应初值下所得到的最优解是否满足要求,进一步克服了上述缺陷。

针对 Fmincon 函数的局限性做了上文阐述的改进,经过实践分析,只有极个别的点(边缘点)陷入局部最优解,针对这一不足,程序中添加了一个高精度全局最优解按钮见图 5 框 1,如图 8 所示。



图8 最优解界面

Fig.8 Optimal solution interface

用户可以修改里面的步长,使得赋给的初值更加精确,给出一个空矩阵收集该范围内局部最优解,最后智能选择最小解即可得到合理的全局最优解。

4 对比计算与分析

由稳定性系数的公式可知, γ 、 c 值的改变对稳定系数没有影响(与临界高度有关),为验证本文方法与所用到的优化函数以及其迭代方法的正确性,对比经典算例,其结果见表 1。

表1 典型算例的稳定系数与本文计算结果对比
Table 1 Result comparisons between existing stable coefficient and that obtained in the paper

上斜坡角 $\alpha / (^\circ)$	下斜坡角 $\beta / (^\circ)$	内摩擦角 $\varphi / (^\circ)$	稳定系数 N_{cr}		
			极限平衡	Chen ^[1]	本文
0	90	0	3.830	3.830	3.830
0	90	5	4.190	4.190	4.190
0	75	15	6.490	6.570	6.567
5	75	15		6.490	6.485
10	70	20		8.100	8.105
10	20	10		21.96*	21.958*
15	20	15		65.17*	65.172*

注: *破坏面通过坡趾时的值,所有其他值为破坏面通过坡趾下方时的值。

由表可知,本文所用的方法与传统的极限分析法以及极限平衡法相比较,所获得的边坡稳定性系数 N_{cr} 的差别很小,说明本方法是有效的。

运行程序分析岩土物理力学参数变化下边坡稳定性变化规律,可选择程序的不同模式,稳定系数变化趋势,如图 9~11 所示。

由图可知,边坡的主要参数对边坡稳定性影响如下:①随着 α 、 β 的增大、 φ 的减小,边坡稳定性显著降低,反之则增加;② β 与 φ 值的变化对边坡的稳定性有显著的影响,上斜坡坡角对边坡稳定系数的影响不是那么明显。这些规律与实际情况是

相符的。③当 φ 、 β 比较接近时、当它们小范围内波动时,对稳定系数的影响特别敏感。

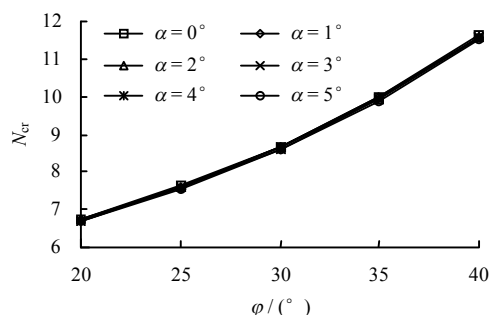


图9 $\alpha=0^{\circ} \sim 5^{\circ}$, $\varphi=20^{\circ} \sim 40^{\circ}$, $\beta=80^{\circ}$ 时稳定系数 N_{cr} 变化趋势

Fig.9 Trends of stability factor for $\alpha=0^{\circ} \sim 5^{\circ}$, $\varphi=20^{\circ} \sim 40^{\circ}$ and $\beta=80^{\circ}$

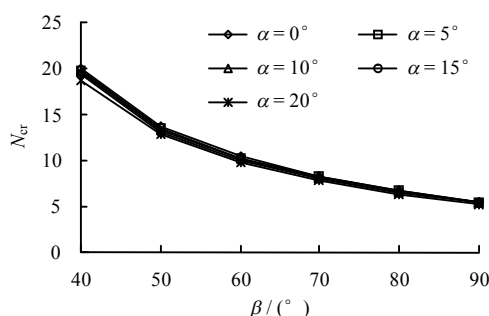


图10 $\alpha=0^{\circ} \sim 20^{\circ}$, $\beta=40^{\circ} \sim 90^{\circ}$, $\varphi=20^{\circ}$ 时稳定系数 N_{cr} 变化趋势

Fig.10 Trends of stability factor for $\alpha=0^{\circ} \sim 20^{\circ}$, $\beta=40^{\circ} \sim 90^{\circ}$ and $\varphi=20^{\circ}$

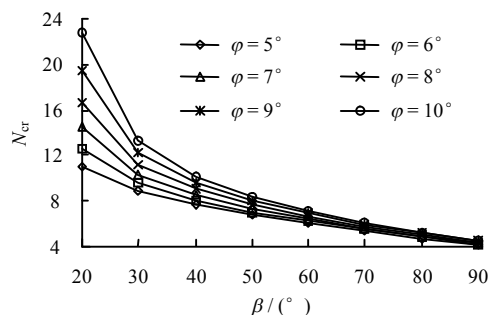


图11 $\beta=20^{\circ} \sim 90^{\circ}$, $\varphi=5^{\circ} \sim 10^{\circ}$, $\alpha=5^{\circ}$ 时稳定系数 N_{cr} 变化趋势

Fig.11 Trends of stability factor for $\beta=20^{\circ} \sim 90^{\circ}$, $\varphi=5^{\circ} \sim 10^{\circ}$ and $\alpha=5^{\circ}$

5 结 论

(1) 基于极限分析上限原理,通过 MATLAB 软件开发了一款面向对象的边坡稳定性分析程序,采用了枚举法,解决了传统优化算法(SQP)易陷入局部最优解问题,并实现了对多个边坡稳定性分析的批量处理;实现了对输出结果处理与保存以及

参数对优化参数影响的趋势图与即时边坡破坏图形的界面输出。

(2) 对影响边坡稳定性的 α 、 β 、 φ 进行了参数分析:①随着上斜坡坡角 α 、下斜坡坡角 β 的增大、内摩擦角 φ 的减小,边坡稳定性显著降低,反之则增加。②下斜坡坡角 β 与内摩擦角 φ 值的变化对边坡的稳定性有显著的影响,相比之下上斜坡坡角 α 对边坡稳定系数的影响不是那么明显。这些规律也与实际情况相符。③当 φ 、 β 比较接近时,当它们小范围内波动时,对稳定系数的影响特别敏感。

(3) 就软件现阶段的功能来看,涉及的专业知识主要限于简单的边坡极限分析上限稳定分析理论,扩展到复杂几何形状及复杂地质条件下的边坡,需要做的工作还很多。今后的工作是一方面用更贴切工程实际的安全系数来反应边坡的稳定性;另一方面在软件中添加新的功能模块,如加筋、锚杆(索)、抗滑桩加固等,并将超载、地震效应、岩土材料非线性、地下水位升降等多复杂因素引入程序中。

参 考 文 献

- [1] CHEN H F. Limit analysis and soil plasticity[M]. Amsterdam: Elsevier ASCE, 1975.
- [2] 赵炼恒. 边坡稳定性与加固设计的能量分析方法[D]. 长沙: 中南大学, 2009.
- [3] 赵炼恒, 李亮, 杨峰, 等. 基于 SQP 和上限法的非饱和土条形基础极限承载力计算[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, 28(增刊 1): 3021—3028.
ZHAO Lian-heng, LI Liang, YANG Feng, et al. Ultimate bearing capacity calculation of strip foundation on unsaturated soil with upper bound theorem and SQP method[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2009, 28(Supp. 1): 3021—3028.
- [4] ZHAO Lian-heng, LI Liang, YANG Feng, et al. Upper bound analysis of slope stability with nonlinear failure criterion based on strength reduction technique[J]. Journal of Central South University of Technology, 2010, 17(4): 836—844.
- [5] ZHAO Lian-heng, LI Liang, YANG Feng, et al. Evaluating the effects of the magnitude of pseudo-static force on reinforced slopes based on the nonlinear M-C failure criterion[J]. Electronic Journal of Geotechnical Engineering, 2010, 15(J): 1017—1052.

- [6] ZHAO Lian-heng, LUO Qiang, LI Liang, et al. The upper bound calculation of passive earth pressure based on shear strength theory of unsaturated soil[C]// Proceedings of Slope Stability, Retaining Walls and Foundations. American: ASCE, 2009: 151—157.
- [7] 赵炼恒, 罗强, 李亮, 等. 地下水位变化对边坡稳定性影响的上限分析[J]. 公路交通科技, 2010, 27(7): 1—7.
ZHAO Lian-heng, LUO Qiang, LI Liang, et al. Analysis of upper bound of slope stability considering ground water level fluctuations[J]. **Journal of Highway and Transportation Research and Development**, 2010, 27(7): 1—7.
- [8] 赵炼恒, 罗强, 李亮, 等. 基于失稳状态耗能最小原理的预应力锚索加固边坡稳定性上限解析[J]. 岩土力学, 2013, 34(2): 426—432.
ZHAO Lian-heng, LUO Qiang, LI Liang, et al. Energy analysis method for slopes reinforcing with prestressed anchor cables based on minimum energy principle of instability state[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2013, 34(2): 426—432.
- [9] 杨小礼. 线性与非线性破坏准则下岩土极限分析方法及应用[D]. 长沙: 中南大学, 2002.
- [10] 陈祖煜, 汪小刚, 杨健, 等. 岩质边坡稳定性分析—原理·方法·程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2005.
- [11] 杨小礼, 李亮, 刘宝琛. 非线性破坏准则对竖直边坡稳定性分析的影响[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(4): 592—596.
YANG Xiao-li, LI Liang, LIU Bao-chen. Influences of nonlinear failure criterion on stability analysis of vertical cut using nonlinear SQP algorithm[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2004, 23(4): 592—596.
- [12] 赵炼恒, 李亮, 杨小礼, 等. 非线性破坏准则下法向受力条形浅锚抗拔力上限计算方法[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2009, 40(5): 1444—1450.
ZHAO Lian-heng, LI Liang, YANG Xiao-li, et al. Calculating method of upper bound for ultimate pullout capacity of vertically loaded strip plate anchors based on nonlinear Mohr-Coulomb failure criterion[J]. **Journal of Central South University (Science and Technology)**, 2009, 40(5): 1444—1450.
- [13] 李新坡, 何思明, 徐骏, 等. 预应力锚索加固土质边坡的稳定性极限分析[J]. 四川大学学报(工程科学版), 2006, 38(5): 82—85.
LI Xin-po, HE Si-ming, XU Jun, et al. Stability analysis of slopes reinforced with pre-tensioned cables by limit analysis method[J]. **Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition)**, 2006, 38(5): 82—85.
- [14] 李新坡, 张正波, 吴永, 等. 非线性破坏准则的竖直边坡稳定性分析[J]. 四川大学学报(工程科学版), 2009, 41(增刊 1): 80—83.
LI Xin-po, ZHANG Zheng-bo, WU Yong, et al. Vertical slopes stability analysis with nonlinear failure criterion[J]. **Journal of Sichuan University(Engineering Science Edition)**, 2009, 41(Supp.1): 80—83.
- [15] 张迎宾, 李亮, 赵炼恒, 等. 基于非线性破坏准则的边坡稳定性极限分析[J]. 岩土力学, 2011, 32(11): 3313—3318.
ZHANG Ying-bin, LI Liang, ZHAO Lian-heng, et al. Limit analysis of slope stability based on nonlinear failure criterion[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2011, 32(11): 3313—3318.
- [16] 龚纯, 王正林. MATLAB 语言常用算法程序集[M]. 北京: 电子工业出版社, 2008.